Aufgaben

(27/28) Homogenisierung und Durchschnitte mit affinen Unterräumen.

Gegeben seien $\varphi = 2x_1^2+x_2^2-x_3^2-1, \varphi_h = 2x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2 \in \mathbb{R}[x_1,x_2,x_3,x_4]$. φ_h ist die Homogenisierung von φ mit der neuen Variablen x_4 und die quadratische Fläche $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\varphi)$ in $\mathbb{R}^3$ lässt sich bis auf die Einbettung $\epsilon : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, (r_1,r_2,r_3) \mapsto (r_1,r_2,r_3,1)$ darstellen als in $\mathbb{R}^4$ gebildeter Durchschnitt:

$$\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\{\varphi, x_4-1\}) = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\varphi_h) \cap \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_4-1) \ .$$

In dieser Aufgabe soll beispielhaft untersucht werden, wie sich die quadratische „Fläche“ u.U. verändern kann, wenn statt mit der Hyperebene $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_4-1)$ mit einem anderen affinen Unterraum geschnitten wird.

Seien dazu

$$\begin{aligned} \lambda = &\quad x_1 - x_2 - x_4 - 1, \\ \mu = &\quad x_1 + x_2 - x_3 - 1, \end{aligned}$$

$$\Lambda = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\lambda), \mathrm{M} = \mathcal{V}(\mu) \quad \text{und} \quad \Phi = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\varphi_h) \ .$$

Bestimmt werden soll eine Gleichung für $\Phi \cap \Lambda \cap \mathrm{M}$ bezüglich $\Lambda \cap \mathrm{M}$ und mit Hilfe dieser Gleichung der Typ der Kurve. Zur Vermeidung aufwendiger Ausdrücke wird im Folgenden ein Rechenweg teilweise vorgegeben. Andere Wege sind möglich.

(a) Bestimmen Sie eine Bewegung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, mit zugehöriger orthogonaler Abbildung ℓ und mit

$$f(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Lambda \cap \mathrm{M} \quad \text{und} \quad \ell(e^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ell(e^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \overrightarrow{\Lambda \cap \mathrm{M}} \ .$$

(b) Die neuen Variablen seien mit y_1, y_2, y_3, y_4 bezeichnet. Bestimmen Sie ein Polynom $\psi \in \mathbb{R}[y_1,y_2]$ derart, dass $\Phi \cap \Lambda \cap \mathrm{M} = f\big(\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\{\psi, y_3, y_4\})\big)$. Die gesuchte Gleichung lautet dann $\psi = 0$.

(c) Ordnen Sie $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\varphi)$ in $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\psi)$ in $\mathbb{R}^2$ ein mit Hilfe einer Klassifikation aus der linearen Algebra (siehe z.B. die Hinweise in [Sch], Seite 29).

(d) Mit Hilfe der Gleichungen $\lambda = 0, \mu = 0$ erhält man durch geeignetes Einsetzen in φ_h ein Polynom $\xi \in \mathbb{R}[x_1,x_2]$. Hätte man den Typ von $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\psi)$ an Hand des Typs von $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\xi)$ bestimmen können ?